Caracterización axiomática de una solución para programar trabajos en una línea de espera

Congreso Nacional de la SMM

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Francisco Sánchez Sánchez

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Octubre 22, 2021

Presentación

- Cómo caracterizar soluciones.
- El problema.
- Proponer una solución y su caracterización.
- Independencia de axiomas.
- Se analiza la parte estratégica de la solución.

Presentación

- Cómo caracterizar soluciones.
- El problema.
- Proponer una solución y su caracterización.
- Independencia de axiomas.
- Se analiza la parte estratégica de la solución.

Presentación

- Cómo caracterizar soluciones.
- El problema.
- Proponer una solución y su caracterización.
- Independencia de axiomas.
- Se analiza la parte estratégica de la solución.

Presentación

- Cómo caracterizar soluciones.
- El problema.
- Proponer una solución y su caracterización.
- Independencia de axiomas.
- Se analiza la parte estratégica de la solución.

Presentación

- Cómo caracterizar soluciones.
- El problema.
- Proponer una solución y su caracterización.
- Independencia de axiomas.
- Se analiza la parte estratégica de la solución.

Cómo caracterizar soluciones

Se definen

- Un espacio de problemas: $\mathcal{P}$
- Un espacio de soluciones $\mathcal{S}$
- Un operador $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$
- El siguiente paso consiste en incorporar los criterios generales (axiomas) que se cree deba cumplir cualquier operador "elegible", hasta que sólo haya un operador que cumpla todos los criterios.

Cómo caracterizar soluciones

Se definen

- Un espacio de problemas: $\mathcal{P}$
- Un espacio de soluciones $\mathcal{S}$
- Un operador $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$
- El siguiente paso consiste en incorporar los criterios generales (axiomas) que se cree deba cumplir cualquier operador "elegible", hasta que sólo haya un operador que cumpla todos los criterios.

Cómo caracterizar soluciones

Se definen

- Un espacio de problemas: $\mathcal{P}$
- Un espacio de soluciones $\mathcal{S}$
- Un operador $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$
- El siguiente paso consiste en incorporar los criterios generales (axiomas) que se cree deba cumplir cualquier operador "elegible", hasta que sólo haya un operador que cumpla todos los criterios.

Cómo caracterizar soluciones

Se definen

- Un espacio de problemas: $\mathcal{P}$
- Un espacio de soluciones $\mathcal{S}$
- Un operador $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{S}$
- El siguiente paso consiste en incorporar los criterios generales (axiomas) que se cree deba cumplir cualquier operador "elegible", hasta que sólo haya un operador que cumpla todos los criterios.

Ventajas

- Se obtienen o eliminan soluciones para toda una clase de problemas simplemente aceptando o no "supuestos generales".
- Se evita la discusión sobre las características que debe tener la solución de un problema concreto.
- Dada una clase fija de problemas, las soluciones obtenidas son "buenas" o "justas" en el sentido de que no hay ningún otro conjunto de soluciones asociado a los problemas, de modo que se satisfacen simultáneamente todos los axiomas o criterios preestablecidos.

Ventajas

- Se obtienen o eliminan soluciones para toda una clase de problemas simplemente aceptando o no "supuestos generales".
- Se evita la discusión sobre las características que debe tener la solución de un problema concreto.
- Dada una clase fija de problemas, las soluciones obtenidas son "buenas" o "justas" en el sentido de que no hay ningún otro conjunto de soluciones asociado a los problemas, de modo que se satisfacen simultáneamente todos los axiomas o criterios preestablecidos.

Ventajas

- Se obtienen o eliminan soluciones para toda una clase de problemas simplemente aceptando o no "supuestos generales".
- Se evita la discusión sobre las características que debe tener la solución de un problema concreto.
- Dada una clase fija de problemas, las soluciones obtenidas son "buenas" o "justas" en el sentido de que no hay ningún otro conjunto de soluciones asociado a los problemas, de modo que se satisfacen simultáneamente todos los axiomas o criterios preestablecidos.

Problema

- Fotocopiadora.
- Caja en una tienda de auto servicio.
- Pedidos en una fábrica.
- El costo total de espera depende del orden en el que se da el servicio.
- Dar el servicio en el orden óptimo y repartir el ahorro entre los clientes.

Problema

- Fotocopiadora.
- Caja en una tienda de auto servicio.
- Pedidos en una fábrica.
- El costo total de espera depende del orden en el que se da el servicio.
- Dar el servicio en el orden óptimo y repartir el ahorro entre los clientes.

Problema

- Fotocopiadora.
- Caja en una tienda de auto servicio.
- Pedidos en una fábrica.
- El costo total de espera depende del orden en el que se da el servicio.
- Dar el servicio en el orden óptimo y repartir el ahorro entre los clientes.

Problema

- Fotocopiadora.
- Caja en una tienda de auto servicio.
- Pedidos en una fábrica.
- El costo total de espera depende del orden en el que se da el servicio.
- Dar el servicio en el orden óptimo y repartir el ahorro entre los clientes.

Problema

- Fotocopiadora.
- Caja en una tienda de auto servicio.
- Pedidos en una fábrica.
- El costo total de espera depende del orden en el que se da el servicio.
- Dar el servicio en el orden óptimo y repartir el ahorro entre los clientes.

Solución

- Usualmente, el intercambio de consecutivos no afecta a los otros clientes.
- La regla de división o solución: Una sucesión de acuerdos bilaterales entre clientes consecutivos en la línea de espera.
  - cada cliente que participa en un acuerdo obtiene el mismo beneficio que su contraparte.
  - si no participa, no es afectado por él.
- También necesitamos implementar la solución.

Solución

- Usualmente, el intercambio de consecutivos no afecta a los otros clientes.
- La regla de división o solución: Una sucesión de acuerdos bilaterales entre clientes consecutivos en la línea de espera.
  - cada cliente que participa en un acuerdo obtiene el mismo beneficio que su contraparte.
  - si no participa, no es afectado por él.
- También necesitamos implementar la solución.

Solución

- Usualmente, el intercambio de consecutivos no afecta a los otros clientes.
- La regla de división o solución: Una sucesión de acuerdos bilaterales entre clientes consecutivos en la línea de espera.
  - cada cliente que participa en un acuerdo obtiene el mismo beneficio que su contraparte.
  - si no participa, no es afectado por él.
- También necesitamos implementar la solución.

Solución

- Usualmente, el intercambio de consecutivos no afecta a los otros clientes.
- La regla de división o solución: Una sucesión de acuerdos bilaterales entre clientes consecutivos en la línea de espera.
  - cada cliente que participa en un acuerdo obtiene el mismo beneficio que su contraparte.
  - si no participa, no es afectado por él.
- También necesitamos implementar la solución.

Solución

- Usualmente, el intercambio de consecutivos no afecta a los otros clientes.
- La regla de división o solución: Una sucesión de acuerdos bilaterales entre clientes consecutivos en la línea de espera.
  - cada cliente que participa en un acuerdo obtiene el mismo beneficio que su contraparte.
  - si no participa, no es afectado por él.
- También necesitamos implementar la solución.

Notación

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de clientes.
- $P = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de posiciones en la línea de espera.
- $\Theta = \{\theta | \theta : P \to N\}$ el conjunto de ordenes completos de los clientes.
- Para $\theta \in \Theta$, θ_k denota el cliente que esta en la posición k. Los elementos de Θ son ordenes de arribo en la línea de espera, o si se prefiere, el conjunto de permutaciones de N.

Notación

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de clientes.
- $P = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de posiciones en la línea de espera.
- $\Theta = \{\theta | \theta : P \to N\}$ el conjunto de ordenes completos de los clientes.
- Para $\theta \in \Theta$, θ_k denota el cliente que esta en la posición k. Los elementos de Θ son ordenes de arribo en la línea de espera, o si se prefiere, el conjunto de permutaciones de N.

Notación

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de clientes.
- $P = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de posiciones en la línea de espera.
- $\Theta = \{\theta | \theta : P \to N\}$ el conjunto de ordenes completos de los clientes.
- Para $\theta \in \Theta$, θ_k denota el cliente que esta en la posición k. Los elementos de Θ son ordenes de arribo en la línea de espera, o si se prefiere, el conjunto de permutaciones de N.

Notación

Sean

- $N = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de clientes.
- $P = \{1, \ldots, n\}$ el conjunto de posiciones en la línea de espera.
- $\Theta = \{\theta | \theta : P \to N\}$ el conjunto de ordenes completos de los clientes.
- Para $\theta \in \Theta$, θ_k denota el cliente que esta en la posición k. Los elementos de Θ son ordenes de arribo en la línea de espera, o si se prefiere, el conjunto de permutaciones de N.

Notación

- Se supone dada en forma exógena una función $g : \Theta \to R_+$, donde $g(\theta)$ es el costo total de espera cuando se atienden a los clientes de acuerdo al orden θ.
- Para dos clientes $i, j \in N$ arbitrarios, vamos a denotar por $\theta[ij]$ al orden de los clientes que resulta de intercambiar a los clientes i y j en el orden θ.
- Además, sea
$$\theta^* \in \arg\min_{\theta \in \Theta} g(\theta).$$
el orden óptimo en el servicio.

Notación

- Se supone dada en forma exógena una función $g : \Theta \to R_+$, donde $g(\theta)$ es el costo total de espera cuando se atienden a los clientes de acuerdo al orden θ.
- Para dos clientes $i, j \in N$ arbitrarios, vamos a denotar por $\theta[ij]$ al orden de los clientes que resulta de intercambiar a los clientes i y j en el orden θ.
- Además, sea
$$\theta^* \in \arg\min_{\theta \in \Theta} g(\theta).$$
el orden óptimo en el servicio.

Notación

- Se supone dada en forma exógena una función $g : \Theta \to R_+$, donde $g(\theta)$ es el costo total de espera cuando se atienden a los clientes de acuerdo al orden θ.
- Para dos clientes $i, j \in N$ arbitrarios, vamos a denotar por $\theta[ij]$ al orden de los clientes que resulta de intercambiar a los clientes i y j en el orden θ.
- Además, sea
$$\theta^* \in \arg \min_{\theta \in \Theta} g(\theta).$$
el orden óptimo en el servicio.

Caracterización

- Se desea asignar a cada pareja (θ, g) un vector de pagos que reparta $g(\theta) - g(\theta^*)$ entre los clientes.
- El conjunto de problemas: las parejas (θ, g).
- El conjunto de resultados: R_+^N.
- El operador: $f : \Theta \times G \to R_+^N$.

Caracterización

- Se desea asignar a cada pareja (θ, g) un vector de pagos que reparta $g(\theta) - g(\theta^*)$ entre los clientes.
- El conjunto de problemas: las parejas (θ, g).
- El conjunto de resultados: R_+^N.
- El operador: $f : \Theta \times G \to R_+^N$.

Caracterización

- Se desea asignar a cada pareja (θ, g) un vector de pagos que reparta $g(\theta) - g(\theta^*)$ entre los clientes.
- El conjunto de problemas: las parejas (θ, g).
- El conjunto de resultados: R_+^N.
- El operador: $f : \Theta \times G \to R_+^N$.

Caracterización

- Se desea asignar a cada pareja (θ, g) un vector de pagos que reparta $g(\theta) - g(\theta^*)$ entre los clientes.
- El conjunto de problemas: las parejas (θ, g).
- El conjunto de resultados: R_+^N.
- El operador: $f : \Theta \times G \to R_+^N$.

Definiciones

Definición. Diremos que la función de costos de espera $g : \Theta \rightarrow R_+$ es consistente si y sólo si

$$(g(\theta[ij]) - g(\theta)) \cdot (g(\theta^*[ij]) - g(\theta^*)) > 0$$

para todo $\theta \in \Theta$ y i y j consecutivos en θ.

Sea G el conjunto de funciones de costo de espera consistentes.

Definiciones

Definición. Diremos que la función de costos de espera $g : \Theta \to R_+$ es consistente si y sólo si

$$(g(\theta[ij]) - g(\theta)) \cdot (g(\theta^*[ij]) - g(\theta^*)) > 0$$

para todo $\theta \in \Theta$ y i y j consecutivos en θ.

Sea G el conjunto de funciones de costo de espera consistentes.

Definiciones

Definición. Una regla de división es una función $f : \Theta \times G \to R_+^N$ tal que

$$\sum_{i \in N} f_i(\theta, g) = g(\theta) - g(\theta^*) \tag{1}$$

y $f(\theta^*, g) = 0$ para todo $g \in G$.

Como g se mantiene fija a lo largo de la presentación, escribiremos $f(\theta)$ en lugar de $f(\theta, g)$.

Definiciones

Definición. Una regla de división es una función $f : \Theta \times G \rightarrow R_{+}^{N}$ tal que

$$\sum_{i \in N} f_i(\theta, g) = g(\theta) - g(\theta^*) \tag{1}$$

y $f(\theta^*, g) = 0$ para todo $g \in G$.

Como g se mantiene fija a lo largo de la presentación, escribiremos $f(\theta)$ en lugar de $f(\theta, g)$.

Axiomas

Axioma. Principio de no incumbencia. Diremos que la regla de división f satisface el principio de no incumbencia si $f_l(\theta[ij]) = f_l(\theta)$ para todo $l \neq i, j$ y i, j consecutivos en $\theta \in \Theta$.

Axioma. Axioma de equidad. Diremos que la regla de división f satisface el axioma de equidad si

$$f_i(\theta) - f_i(\theta[ij]) = f_j(\theta) - f_j(\theta[ij]) \tag{2}$$

para i y j consecutivos en θ.

Axiomas

Axioma. Principio de no incumbencia. Diremos que la regla de división f satisface el principio de no incumbencia si $f_l(\theta[ij]) = f_l(\theta)$ para todo $l \neq i, j$ y i, j consecutivos en $\theta \in \Theta$.

Axioma. Axioma de equidad. Diremos que la regla de división f satisface el axioma de equidad si

$$f_i(\theta) - f_i(\theta[ij]) = f_j(\theta) - f_j(\theta[ij]) \tag{2}$$

para i y j consecutivos en θ.

La solución

La solución que proponemos es el resultado del siguiente procedimiento, el cual también sugiere una forma de implementarla,

Procedimiento:
Iniciando con el orden θ, repetir 1 y 2 hasta que no se encuentre pareja en el paso 1.

1. Buscar la primera pareja en la línea de espera cuyo orden no coincida con el orden θ^*.
2. La pareja encontrada intercambia lugares en la línea de espera y dividen en partes iguales el cambio en la función objetivo.

La solución

La solución que proponemos es el resultado del siguiente procedimiento, el cual también sugiere una forma de implementarla,

Procedimiento:
Iniciando con el orden θ, repetir 1 y 2 hasta que no se encuentre pareja en el paso 1.

1. Buscar la primera pareja en la línea de espera cuyo orden no coincida con el orden θ^*.
2. La pareja encontrada intercambia lugares en la línea de espera y dividen en partes iguales el cambio en la función objetivo.

Procedimiento

Sea

$$\theta^* = \theta[i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_m j_m] \tag{3}$$

la secuencia de intercambios que se obtiene como resultado del procedimiento anterior.

Y sea $S(\theta) = [i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_m j_m]$. Nótese que los elementos de $S(\theta)$ estan ordenados.

Procedimiento

Sea

$$\theta^* = \theta[i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_m j_m] \tag{3}$$

la secuencia de intercambios que se obtiene como resultado del procedimiento anterior.

Y sea $S(\theta) = [i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_m j_m]$. Nótese que los elementos de $S(\theta)$ estan ordenados.

Procedimiento

Ejemplo, para $\theta = [2, 1, 3, 4]$ y $\theta^* = [4, 1, 2, 3]$,

$$\begin{array}{ccc} \theta & = & [2, 1, 3, 4] \\ \theta[12] & = & [1, 2, 3, 4] \\ \theta[12][43] & = & [1, 2, 4, 3] \\ \theta[12][43][42] & = & [1, 4, 2, 3] \\ \theta[12][43][42][41] & = & [4, 1, 2, 3] = \theta^* \end{array}$$

Formalmente

Sean

$$\Delta_k g(\theta) = g(\rho_{k-1}) - g(\rho_k)$$

donde $\rho_k = \theta[i_1, j_1][i_2, j_2] \ldots [i_k, j_k]$ para $k = 1, \ldots, m$ y $\rho_0 = \theta$.

Además, sea

$$A_l(\theta) := \{k | [i_k, j_k] \in S(\theta), l = i_k \text{ or } l = j_k\}$$

el conjunto de subíndices de los acuerdos bilaterales donde participa el cliente l en el orden θ.

Formalmente

Sean

$$\Delta_k g(\theta) = g(\rho_{k-1}) - g(\rho_k)$$

donde $\rho_k = \theta[i_1, j_1][i_2, j_2] \ldots [i_k, j_k]$ para $k = 1, \ldots, m$ y $\rho_0 = \theta$.

Además, sea

$$A_l(\theta) := \{k | [i_k, j_k] \in S(\theta), l = i_k \text{ or } l = j_k\}$$

el conjunto de subíndices de los acuerdos bilaterales donde participa el cliente l en el orden θ.

Solución explícita

Definición. *Vamos a llamar regla de división por mitad a la función* $E : \Theta \times G \to R_{+}^{N}$ *dada por*

$$E_l(\theta) = \sum_{k \in A_l(\theta)} \frac{\Delta_k g(\theta)}{2}. \tag{4}$$

Ejemplo

Ejemplo. Supongamos que la línea de espera inicial es $\theta = [4,3,1,2]$, la óptima $\theta^* = [1,2,4,3]$ y que la parte de g necesaria para encontrar la solución es la dada en la siguiente tabla,

k	ρ	$g(\rho)$	$\frac{\Delta_k(\rho)}{2}$	$E_1(\rho)$	$E_2(\rho)$	$E_3(\rho)$	$E_4(\rho)$
1	$[4,3,1,2]$	218	33	$25+33$	$19+19$	$19+33$	$19+25$
2	$[4,1,3,2]$	152	25	25	$19+19$	19	$19+25$
3	$[1,4,3,2]$	102	19	0	$19+19$	19	19
4	$[1,4,2,3]$	64	19	0	19	0	19
5	$[1,2,4,3]$	26		0	0	0	0

Así, $E([4,3,1,2]) = (58, 38, 52, 44)$.

Resultados principales

Proposición. E es una regla de división.

Lema. Supongamos i y j consecutivos en $\theta \in \Theta$ entonces

- $E_i(\theta[ij]) = E_i(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$.
- $E_j(\theta[ij]) = E_j(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$
- $E_l(\theta[ij]) = E_l(\theta)$ for every $l \in N \setminus \{i, j\}$.

Lema. E satisface los axiomas de no incumbencia y equidad.

Resultados principales

Proposición. E es una regla de división.

Lema. Supongamos i y j consecutivos en $\theta \in \Theta$ entonces

- $E_i(\theta[ij]) = E_i(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$.
- $E_j(\theta[ij]) = E_j(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$
- $E_l(\theta[ij]) = E_l(\theta)$ for every $l \in N \setminus \{i, j\}$.

Lema. E satisface los axiomas de no incumbencia y equidad.

Resultados principales

Proposición. E es una regla de división.

Lema. Supongamos i y j consecutivos en $\theta \in \Theta$ entonces

- $E_i(\theta[ij]) = E_i(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$.
- $E_j(\theta[ij]) = E_j(\theta) + \frac{\Delta_1 g(\theta)}{2}$
- $E_l(\theta[ij]) = E_l(\theta)$ for every $l \in N \setminus \{i, j\}$.

Lema. E satisface los axiomas de no incumbencia y equidad.

Resultados principales

Teorema

La regla de división f satisface los axiomas de no incumbencia y equidad si y sólo si $f = E$.

Independencia de los axiomas

Ejemplo de una regla de división que satisface el axioma de equidad pero no el principio de no incumbencia.

Sea $f : \Theta \times G \to R_{+}^{N}$ definida por

$$f_i(\theta, g) = \frac{g(\theta) - g(\theta^*)}{n}$$

para $i \in N$.

Independencia de los axiomas

Una regla de división que satisface el principio de no incumbencia y no equidad. Sean
$A_l^1(\theta) = \{k|[i_k, j_k] \in S(\theta), l = i_k\}$ y
$A_l^2(\theta) = \{k|[i_k, j_k] \in S(\theta), l = j_k\}$.

$A_l^1(\theta)$ contiene los subíndices de los acuerdos bilaterales donde l avanza en la cola y $A_l^2(\theta)$ cuando es él, el que sede su lugar. Ahora, sea f definida por

$$f_l(\theta) := \frac{1}{4} \sum_{k \in A_l^1(\theta)} \Delta_k g(\theta) + \frac{3}{4} \sum_{k \in A_l^2(\theta)} \Delta_k g(\theta)$$

Análisis estratégico

- Los clientes deciden si intercambian lugares.
- Sucesión de juegos no cooperativos:
  - $\rho = \eta[i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_{m-1} j_{m-1}]$ para $k = 1, \ldots, n$ y $\rho_0 = 0$ como antes.
  - $M^k = \{i, j\}$ para cada $[i, j] \in S(\theta)$.
  - $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ donde 1 significia aceptar el intercambio de lugares y 0 no.
  - $h^k : S_1 \times S_2 \to R^2$ definida por

$$h_l^k(x, y) = \begin{cases} \dfrac{g(\rho_{k-1}) - g(\rho_k)}{2} & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

para $l = i, j$.

Análisis estratégico

- Los clientes deciden si intercambian lugares.
- Sucesión de juegos no cooperativos:
  - $\rho = \eta[i_1 j_1], [i_2 j_2], \dots [i_{m-1} j_{m-1}]$ para $k = 1, \dots, n$ y $\rho_0 = 0$ como antes.
  - $M^k = \{i, j\}$ para cada $[i, j] \in S(\theta)$.
  - $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ donde 1 significia aceptar el intercambio de lugares y 0 no.
  - $h^k : S_1 \times S_2 \to R^2$ definida por

$$h_l^k(x, y) = \begin{cases} \dfrac{g(\rho_{k-1}) - g(\rho_k)}{2} & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

para $l = i, j$.

Análisis estratégico

- Los clientes deciden si intercambian lugares.
- Sucesión de juegos no cooperativos:
  - $\rho = \eta[i_1 j_1], [i_2 j_2], \ldots [i_{m-1} j_{m-1}]$ para $k = 1, \ldots, n$ y $\rho_0 = 0$ como antes.
  - $M^k = \{i, j\}$ para cada $[i, j] \in S(\theta)$.
  - $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$ donde 1 significia aceptar el intercambio de lugares y 0 no.
  - $h^k : S_1 \times S_2 \to R^2$ definida por

$$h_l^k(x, y) = \begin{cases} \dfrac{g(\rho_{k-1}) - g(\rho_k)}{2} & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

para $l = i, j$.

Así el procedimiento se descompone en los juegos no cooperativos $\Gamma^k = (M^k, \{S_1, S_2\}, h^k)$. Claramente

$$\sigma_l^k = \begin{cases} 1 & \text{if } g(\rho_{k-1}) > g(\rho_k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

para $l = i, j$ forma un equilibrio de Nash para Γ^k, más aún, son equilibrios con estrategias dominantes. Por otro lado, la suma de estos equilibrios es la regla de división por mitad.

El análisis anterior supone independencia de los juegos unos con otros. En forma alternativa si todo el procedimiento se considera como un solo juego y los clientes conocen la función objetivo, el conjunto de decisiones no forma un equilibrio de Nash para el juego completo como se muestra en el siguiente ejemplo.

Supongamos la siguiente función objetivo,

η	$g(\eta)$
$1, 2, 3$	100
$1, 3, 2$	98
$2, 1, 3$	96
$2, 3, 1$	94
$3, 1, 2$	4
$3, 2, 1$	2

con orden inicial $\theta = [1, 2, 3]$ y $\theta^* = [3, 2, 1]$. Primero calculamos la división por mitad. El cliente 1 es el primero en llegar, después arriba el cliente 2 he intercambia lugares con el cliente 1, ganando 2 unidades cada uno por ello. Después arriba el cliente 3, intercambia con 1, cada uno obtiene 1 unidad.

Por último, los clientes 2 y 3 intercambian lugares obteniendo cada uno 46 unidades. El vector de compensaciones final es (3,48,47). Estos cambios se resumen en la siguiente tabla.

$[ij]$	1	2	3
$[1,2]$	2	2	
13	1		1
23		46	46

Ahora analizamos que sucede si el primer intercambio entre 1 y 2 no se realiza. Cuando arriba el cliente 3 le preceden 1 y 2 en ese orden. Así, el cliente 3 intercambia con el cliente 2, cada uno obtiene 1 unidad, y después 3 intercambia con 1, cada uno obtiene 47. El vector de compensaciones final es (47,1,48). Aunque no se llega al óptimo, el pago del cliente 1 pasa de 3 si se apega al procedimiento a 47 si rechaza el intercambio en el primer paso.

$[ij]$	1	2	3
23		1	1
13	47		47

Así, la división por mitad no es un equilibrio de Nash.

Referencias

- Curiel I., Pederzoli G. and Tijs S., 1989. Sequencing games. European Journal of Operations Research 40, 344-351.
- Curiel I., Potters J., Prasad R., Tijs S., Veltman B., 1994 Sequencing and Cooperation. Operations Research 42(3):566-568.
- Youngsub Chun, 2006. A pessimistic approach to the queueing problem. Mathematical Social Sciences Volume 51, Issue 2, March 2006, Pages 171-181
- Maniquet, F., 2003. A characterization of the Shapley value in queueing problems. Journal of Economic Theory 109, 90–103.
- Smith, W., 1956. Various Optimizers for Single-Stage Production, Naval Res. Logistics Quarterly 3, 59-66.